UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

MSc. GEOVANY SANABRIA BRENES

En Resumen

Se parte de los polígonos de Arquímedes que permiten definir las funciones trigonométricas sobre un conjunto discreto, probar sus propiedades en dicho conjunto y abordar la medida de ángulos en radianes. Se generaliza intuitivamente lo anterior, definiendo las funciones trigonométricas sobre el conjunto continuo de las medidas de ángulos agudos. Finalmente, se amplia el dominio de las funciones trigonométricas estudiadas y se justifican sus propiedades. La propuesta es complementada con software que ayuda a la compresión.

Palabras claves: trigonometría, didáctica, computación.

1. Introducción

Esta propuesta brinda un desarrollo de la teoría básica de la Trigonometría Plana, bajo un enfoque novedoso que conjuga los siguientes elementos:

1. Concordancia con la Historia. Se definen inicialmente las funciones seno y coseno, como medidas de ciertos segmentos en un círculo de radio 1, siguiendo el enfoque griego. Luego, con ayuda del método de exhaución de Arquímedes, se pasará a la visión trigonométrica de la India, ampliando la definición del seno y coseno como medidas de ciertos segmentos de un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria. El desarrollo expuesto, permitirá abordar la longitud de arco, que dará paso a la medida de un ángulo en radianes.

2. Acorde con una construcción rigurosa de las funciones trigonométricas. El texto es una transposición del trabajo "Las funciones trigonométricas y el método de exhaución de Arquímedes".

3. Énfasis en la intuición y comprensión. El método de exhaución de Arquímedes permite abordar la construcción de las funciones trigonométricas, de manera intuitiva desde un cuadro geométrico.

4. Se brindan situaciones que permitan recordar y reforzar los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de cada sección.

Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica,
gsanabriab@costarricense.cr

5. Incorporación de la tecnología como recurso didáctico. La propuesta es complementado con una serie de programitas Java (applets) que se pueden clasificar en dos tipos:

a. Programas que facilitan la comprensión y por ende, motivan al lector

b. Programas (juegos) que motivan al estudiante a resolver ejercicios de desarrollo automatizados, que suelen ser muy repetitivos y tediosos para el estudiante.

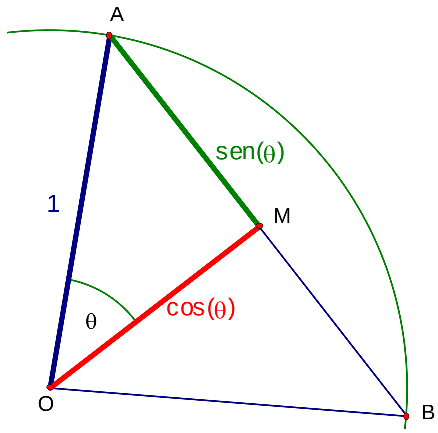
2. Las funciones trigonométricas y los polígonos de Arquímedes

A partir de la definición del polígono y ángulo de Arquímedes se define las funciones seno y coseno.

Definición. *Dado un ángulo de Arquímedes de medida θ se define:*

a) Coseno de θ: es la apotema del polígono de Arquímedes que determina θ, se denota $\cos\theta$.

b) Seno de θ: es la mitad de la medida del lado del polígono de Arquímedes que determina θ, se denota $\operatorname{sen}\theta$.



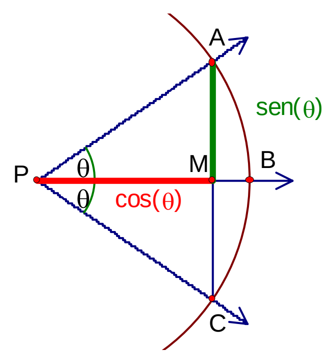
Con esta definición se demuestran algunas identidades.

3. Las funciones trigonométricas sobre el conjunto continuo de las medidas de ángulos agudos

Definición. *Sea θ la medida de un ángulo agudo, y AB una cuerda en un círculo de radio 1, determinada por un ángulo 2θ, se define*

1.seno de θ: es la mitad de la medida de la cuerda.

2.coseno de θ: es la distancia de la cuerda al centro del círculo.



A partir de esta definición se generalizan las propiedades demostradas con la anterior definición.

4. Longitud de arco y medida en radianes

Se utiliza el método de exhaución de Arquímedes y la definición anterior del seno y coseno para aproximar la longitud de arco. Luego se define y justifica la medida en radianes:

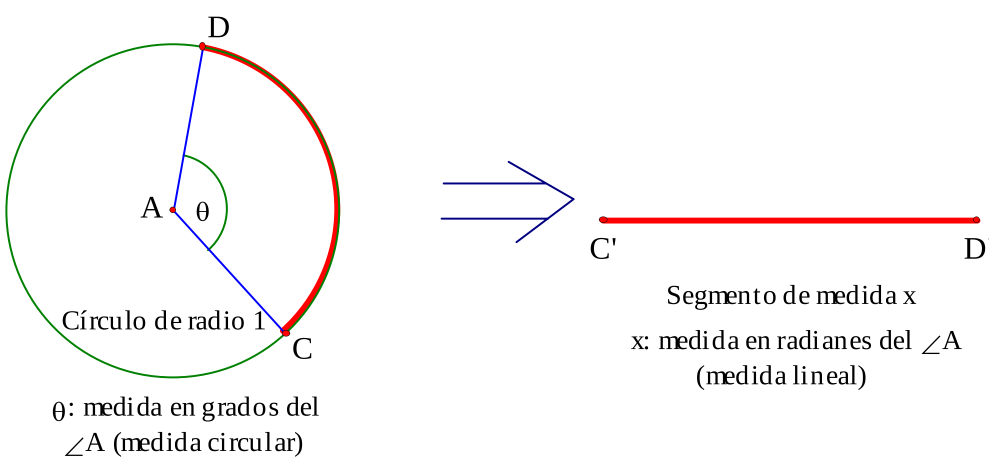
Definición. *Se dice que un ángulo A tiene una medida de x radianes, si al trazar un círculo de radio cualquiera r, la razón de la longitud del arco l determinado por A y r es igual a x, es decir x=(l/r).*

Esta definición y el desarrollo presentado permite hallar una fórmula para aproximar la medida en radianes.

Teorema. *Dado un ángulo A de θ grados, su medida en radianes x es equivalente a la longitud del arco que determina el ángulo A en un círculo de radio 1, donde*

$$x \approx 2^n \operatorname{sen}(\theta/(2^n)) \text{ rad},$$

con n suficientemente grande.



Luego, se ve, intuitivamente, la aproximación de la medida en grados de un ángulo agudo a partir de su medida en radianes. Se sigue con el teorema de conversión entre grados y radianes.

5. Propiedades y aplicaciones

A partir de la función seno y coseno se definen las otras funciones trigonométricas y se estudian las identidades trigonométricas principales sobre medidas de ángulos agudos. Luego, se abordan las aplicaciones de estas funciones, por ejemplo, como relaciones entre las medidas de los lados y ángulos internos de un triángulo rectángulo.

6. Extensión del dominio de las funciones trigonométricas

Se inicia con la definición de rotación, ángulo trigonométrico y su medida.

Definición. (Rotación Angular) *Una rotación angular (a,b) con $a^2+b^2=1$, es una función que toma un rayo AB y lo trasforma en otro AC, donde C se encuentra bajo el siguiente procedimiento:*

1.Se traza el sistema rectangular de coordenadas con centro en A de manera que el AB concuerde con el eje X positivo.

2.Se traza el círculo trigonométrico asociado al sistema construido.

3.El punto C corresponde al punto de la circunferencia trigonométrica de coordenadas (a,b).

Definición (Ángulo trigonométrico) *Dado un sistema rectangular de coordenadas, un ángulo trigonométrico es una cuadrúpleta (a,b,d,n), donde:*

1.El rayo "eje X positivo" es llamado lado inicial del ángulo

2.La rotación (a,b) aplicada al lado inicial, determina el rayo llamado lado final del ángulo.

3.d indica la dirección del ángulo que puede ser positiva (d=+) si es contraria a las manecillas del reloj o, en caso contrario negativa (d=-).

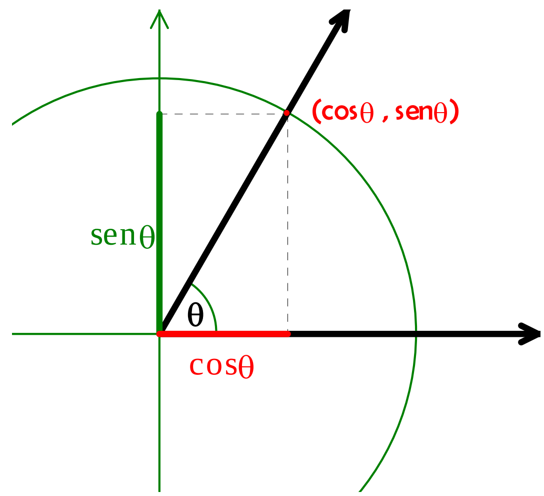
4.n es un número natural que indica el número de vueltas aplicadas al lado inicial en la dirección d, antes de aplicarle la rotación (a,b).

La medida angular de un ángulo trigonométrico se define a partir de los postulados de medida de un ángulo trigonométrico. Se estudian una serie de propiedades del ángulo trigonométrico.

7. Las funciones trigonométricas sobre P

Las definiciones anteriores permite una nueva definición de las funciones trigonométricas sobre P:

Definición. *Sea θ la medida de un ángulo trigonométrico (a,b,d,n), el cual determina el punto del círculo trigonométrico P(a,b). Se define:*



a) El coseno de θ: número real correspondiente a la coordenada X del punto P y se denota $\cos\theta$.

b) El seno de θ: número real correspondiente a la coordenada Y del punto P y se denota $\sin\theta$.

Luego, se definen las otras funciones trigonométricas.

El desarrollo teórico presentado, específicamente la teoría desarrollada de ángulos trigonométricos, permite estudiar en P: las identidades trigonométricas, el dominio de las funciones trigonométricas y sus gráficas.

8. Las funciones trigonométricas inversas

Se estudian las funciones trigonométricas inversas y sus aplicaciones en un triángulo rectángulo y en la resolución de ecuaciones.

Bibliografía

Bourbaki, Nicolas (1972). *"Elementos de historia de las matemáticas"*. Alianza Editorial S.A., Madrid, España.

Brousseau, Guy (1986). *"Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas"*, traducción de *"Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques"*. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7, n 2, pp.33-111.

Cambronero, Santiago (2002). "*Una construcción elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica"*. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol 3, N° 1; Abril 2002. Dirección: http:// www.itcr.ac.cr/ carreras/ matematica/ revistamate/ Contribucionesv3n1002/ funcionexponencial/ index.html.

Chevallard, Yves (1991). *"La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado"*. Aique grupo Editor S.A., Argentina.

Ruiz, Ángel (2003). *"Historia y filosofía de las Matemáticas"*. EUNED, San José, Costa Rica.

Sanabria, Geovany (2006). "*Las Funciones Trigonométricas con el Método de Exhaución de Arquímedes: Dos propuestas metodológicas*". Universidad de Costa Rica. Tesis